Gradient

Le gradient est un **vecteur** qui étend la fonction dérivée à un espace de dimension supérieure.
Il s'agit du produit de l'opérateur différentiel vectoriel nabla $\vec{\nabla}$ par une fonction scalaire f.

coordonnées cartésiennes	coordonnées cylindriques	coordonnées sphériques
$\overrightarrow{grad}\,(f) = \vec{\nabla}\,f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$	$\overrightarrow{grad}\,(f) = \vec{\nabla}\,f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$	$\overrightarrow{grad}\,(f) = \vec{\nabla}\,f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$

Divergence

La divergence est un **scalaire**. Il s'agit du produit scalaire entre l'opérateur différentiel vectoriel nabla $\vec{\nabla}$ et un vecteur $\vec{u}$.

En coordonnées cartésiennes :

$$div\,(\vec{u}) = \vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques :

$$div\,(\vec{u}) = \vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r.u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

En coordonnées sphériques :

$$div\,(\vec{u}) = \vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2.u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\,.u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotationnel

Le rotationnel est un **vecteur**. Il s'agit du produit vectoriel entre l'opérateur différentiel vectoriel nabla $\vec{\nabla}$ et un vecteur $\vec{u}$.

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

coordonnées cylindriques	coordonnées sphériques
$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r.u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \end{bmatrix}$	$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r.\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta\,.u_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right) \\ \frac{1}{r.\sin\theta}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r.sin\theta.u_\varphi)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r.u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \end{bmatrix}$

Laplacien scalaire

L'opérateur Laplacien scalaire (Δ) transforme un scalaire en un autre scalaire. Il s'agit de la divergence du gradient.

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) = \vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\,f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) = \nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphériques :

$$\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Laplacien vectoriel

L'opérateur Laplacien vectoriel (Δ) transforme un vecteur en un autre vecteur. Il s'agit de l'opérateur : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{u}\right) - \overrightarrow{grad}\left(div\,(\vec{u})\right)$.

On l'obtient à partir de l'identité suivante :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{u}\right) = \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{u}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{u} = \overrightarrow{grad}\left(div\,(\vec{u})\right) - \Delta\vec{u}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta\vec{u} = \begin{bmatrix}\Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z\end{bmatrix}$$

Relations fondamentales

$$div\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{u}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) = 0$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) = \Delta f$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{u}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,(\vec{u})\right) - \Delta\vec{u}$$